Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój

Rzeczpospolita Polska

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

O „KRUSZENIU” ZADAŃ I KRUSZENIU LĘKÓW PRZED MATEMATYKĄ

Ogólnopolski Operator Oświaty

Jacek Człapiński

Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój

Rzeczpospolita Polska

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

Materiały szkoleniowe opracowane w ramach projektu „Architekci wiedzy" - szkoła ćwiczeń w Łodzi", nr POWR.02.10.00-00-3034/20, realizowany w ramach Programu Operacyjnego Wiedza Edukacja Rozwój 2014-2020, współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego.

Szkolenie z obszaru matematyki w klasach IV – VIII dla nauczycieli *Szkoły Ćwiczeń* w Łodzi

O „kruszeniu" zadań i kruszeniu lęków przed matematyką

Autor: Jacek Człapiński

Czas trwania szkolenia: 14.05.2021 r. – 26.05.2021 r.
Liczba godzin: 12 godzin

Ogólnopolski Operator Oświaty

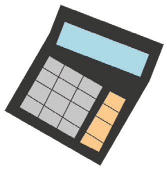
Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój

Rzeczpospolita Polska

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

SPIS TREŚCI

Ogólnopolski Operator Oświaty



Wstęp

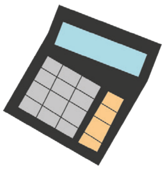
Proces nauczania – uczenia się musi być skuteczny, a miarą tej skuteczności jest sukces, którego mierniki są z pewnością zdefiniowane nieostro. Wpływ na to ma odbiorca informacji o podejmowanych działaniach: szeroko rozumiane środowisko szkoły, organ prowadzący, dyrektor, rodzic, nauczyciel i wreszcie uczeń. Każdy z przywołanych podmiotów oczekuje sukcesu w procesie dydaktycznym i do niego dąży, ale każdy inaczej rozkłady akcenty. Ostatnie kilkanaście lat zrewolucjonizowały odbiór informacji o efektywności procesów dydaktycznych, choć można mieć wątpliwości, czy zmiany poszły w dobrym kierunku. Wprowadzenie systemu egzaminów zewnętrznych i publikowanie skądinąd obiektywnych danych dotyczących gmin, szkół, klas spowodowało, że zwłaszcza w odbiorze decydentów, sukcesem stało się osiągnięcie średnich wyników wyższych niż inna klasa, inna szkoła, niż średni wynik w kraju, czy gminie. **Presja na wynik egzaminu może generować sytuację, w której gubi się uczniów osiągających wyniki niższe.**

Tymczasem sukces może mieć także inny wymiar – pamiętam mądrego dyrektora szkoły, położonej w tzw. trudnym środowisku, który w dyskusji nt. średnich wyników egzaminów gimnazjalnych stwierdził, że dla niego najważniejsze jest sprawić, by wszyscy jego uczniowie pojawili się na egzaminie, by zakodowali arkusz – wszak to był warunek ukończenia szkoły, niezależnie od osiągniętego wyniku. W zaniedbanych środowiskach wykształcenie nie jest wartością, a pojawienie się na egzaminie było być może pierwszą, a być może jedyną sytuacją, w której cześć tych młodych ludzi nieśmiało podjęło próbę rozwinięcia skrzydeł, by wzlecieć. A może było przepustką do nowego otoczenia, w którym pojawił się ktoś, kto rozbudził ciekawość poznawczą, pasję, kto umiał dać szansę i był w tym skuteczny. Bo nauczyciel skuteczny, to nie ten, który „wykręci wynik", ale ten, dzięki któremu uczeń (uczniowie) odkryją radość z zajmowania się określoną dziedziną wiedzy i wcale nie musi to znaczyć, że już na zawsze...

> **Uczenie się matematyki jest dla dziecka ciekawą, intelektualną przygodą, w którą młody człowiek angażuje się bardzo chętnie. Ta naturalna gotowość i zapał giną gdzieś już na początku edukacji formalnej...**

Uczenie się matematyki jest dla dziecka ciekawą, intelektualną przygodą, w którą młody człowiek angażuje się bardzo chętnie, o czym wielokrotnie mówiła dr Elżbieta Gruszczyk - Kolczyńska. Ta naturalna gotowość i zapał giną gdzieś już na początku edukacji formalnej i z pewnością wpływ na to mają odgórnie przygotowywane programy nauczania, których realizacja, podyktowana między innymi stylem pracy nauczyciela, opiera się albo na grupie uczniów najlepszych, którzy są aktywni, szybko rozwiązują stawiane problemy, potrafią uogólniać, stawiać i uzasadniać hipotezy. Przy takim stylu pracy program jest realizowany sprawnie, uczniowie najlepsi są odpowiednio stymulowani, ale pozostali nie korzystają w pełni z zajęć, bo tempo jest zbyt szybkie i wszystko wydaje się zbyt trudne. Można sobie wyobrazić styl pracy, w którym to uczniowie najsłabsi są podmiotami na lekcji matematyki - to do nich nauczyciel kieruje pytania, to ich prosi o rozwiązywanie problemów. Oczywiście wówczas ci bardziej uzdolnieni a nawet ci sprawniejsi rachunkowo nie korzystają w pełni z lekcji, bo w wielu momentach jest to banalne, nudne i nie rozwija ciekawości poznawczej. I oczywiście rozwiązaniem wcale nie jest przyjęcie modelu pracy z tzw. przeciętnym uczniem - zapewne wówczas rzadziej ci najlepsi będą się nudzić, a ci słabsi rzadziej będą się „wyłączać” i myślami uciekać od tego co się dzieje na lekcjach, ale dalej nie będzie to model pracy nakierowany na każdego ucznia.

Przy takim stylu pracy program jest realizowany sprawnie, uczniowie najlepsi są odpowiednio stymulowani, ale pozostali nie korzystają w pełni z zajęć, bo tempo jest zbyt szybkie i wszystko wydaje się zbyt trudne.



Kompetencje kluczowe

Zanim zaproponujemy możliwe rozwiązania przypomnimy to, co o edukacji, w kontekście kompetencji kluczowych, w szczególności o edukacji matematycznej mówią europejskie wytyczne.

Kompetencje kluczowe są definiowane jako połączenie wiedzy, umiejętności i postaw odpowiednich do sytuacji. Kompetencje kluczowe to te, których wszystkie osoby potrzebują do samorealizacji i rozwoju osobistego, bycia aktywnym obywatelem, integracji społecznej i zatrudnienia. Ustanowiono osiem kompetencji kluczowych (Zalecenie Rady, s.7):

1) kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
2) kompetencje w zakresie wielojęzyczności,
3) kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
4) kompetencje cyfrowe,
5) kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
6) kompetencje obywatelskie,
7) kompetencje w zakresie przedsiębiorczości,
8) kompetencje w zakresie świadomości i ekspresji kulturalnej.

Wszystkie kompetencje kluczowe uważane są za jednakowo ważne, ale my skoncentrujemy się tutaj w sposób oczywisty na dwóch z nich.

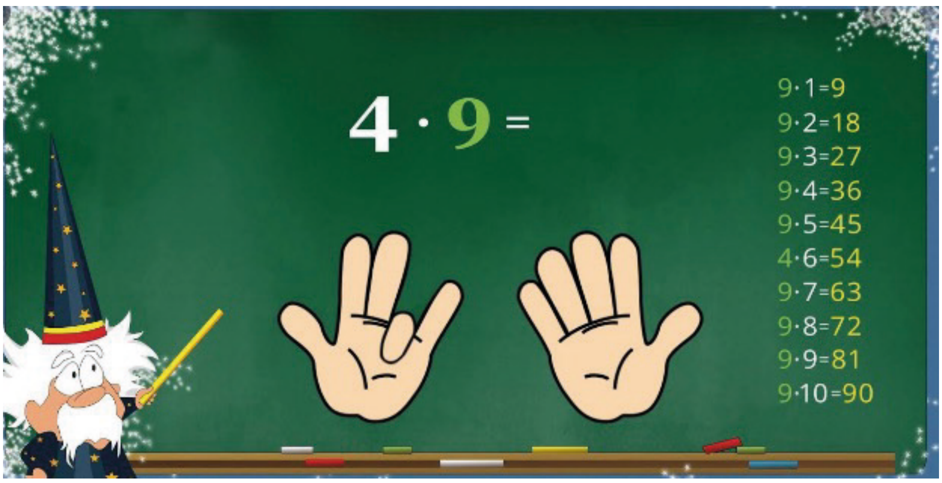
Kompetencje matematyczne i podstawowe kompetencje naukowo-techniczne

Kompetencje matematyczne obejmują umiejętność rozwijania i wykorzystywania myślenia matematycznego w celu rozwiązywania problemów wynikających z codziennych sytuacji (Zalecenie Rady, s.9). Istotne są zarówno proces i czynność, jak i wiedza, przy czym podstawę stanowi należyte opanowanie umiejętności liczenia. Kompetencje matematyczne obejmują – w różnym stopniu – zdolność i chęć wykorzystywania matematycznych sposobów myślenia (myślenie logiczne i przestrzenne) oraz prezentacji (wzory, modele, konstrukty, wykresy, tabele).

Konieczna wiedza w dziedzinie matematyki obejmuje solidną umiejętność liczenia, znajomość miar i struktur, głównych operacji i sposobów prezentacji matematycznej, rozumienie terminów i pojęć matematycznych, a także świadomość pytań, na które matematyka może dać odpowiedź.

Osoba powinna posiadać umiejętności stosowania głównych zasad i procesów matematycznych w codziennych sytuacjach prywatnych i zawodowych, a także śledzenia i oceniania ciągów argumentów. Powinna ona być w stanie rozumować w matematyczny sposób, rozumieć dowód matematyczny i komunikować się językiem matematycznym oraz korzystać z odpowiednich pomocy. Pozytywna postawa w matematyce opiera się na szacunku dla prawdy i chęci szukania przyczyn i oceniania ich zasadności.

Podkreślić należy raz jeszcze należyte opanowanie umiejętności liczenia i to niezależnie od zmian, jakie niesie wszechobecna technologia informacyjna. Warto mieć tu na uwadze także apele nauczycieli trzeciego etapu edukacyjnego, którzy jako podstawową bolączkę, utrudniającą, a często wręcz uniemożliwiającą właściwą realizację procesu kształcenia wskazują braki w zakresie umiejętności o charakterze rachunkowym – także te dotyczące umiejętności z pierwszych lat kształcenia począwszy od tabliczki mnożenia, poprzez działania na liczbach o różnych znakach. Dlatego nie można założyć raz na zawsze, że zrealizowanie danego tematu, związanego na przykład ze strategiami mnożenia przez 9, oznacza opanowanie tej umiejętności przez ogół uczniów.



https://www.youtube.com/watch?v=D5IYzN2EH1M

Należy przy każdej nadarzającej się okazji wracać do umiejętności związanych z liczeniem. Taką okazją może być chwila, w której nauczyciel przygotowuje materiały, kiedy uruchamia jakąś aplikację, czy wreszcie moment, który zrodził się na zakończenie lekcji, po zrealizowaniu zaplanowanego tematu – pod ręką mogą być krótkie karty pracy wręczane uczniom lub plakaty, po które szybko sięga nauczyciel. Swoją drogą można odnieść wrażenie, że nauka „tabliczki mnożenia" jest dzisiaj niemodna. Presja, by uczniowie opanowali na pamięć, to czego uczyły się całe pokolenia, naraża nauczyciela na zarzuty dotyczące niezrozumienia „ducha czasu" i korzyści, jakie niesie technologia informacyjna. Myślę, że warto wówczas odnieść się do wytycznych Rady Europejskiej, gdzie postulowana jest należycie opanowana umiejętność liczenia, a nie wykorzystania w zastępstwie urządzeń obliczeniowych. Nie zmienia to faktu, że z liczenia można zrobić ciekawą zabawę, chociażby poprzez zaproponowanie uczniom, by znaleźli „niestandardowe" metody wykorzystywane do liczenia, np. takie, jak zaprezentowane na rysunku strategie mnożenia przez 9 – warto zachęcić uczniów, by wyszukali w Internecie analogiczne algorytmy dotyczące innych działań i jedną z lekcji poświęcić na ich prezentację i zbadanie efektywności (konkurs indywidualny lub zespołowy w zakresie stosowania takich metod).

Umiejętność uczenia się

„Umiejętność uczenia się" to zdolność konsekwentnego i wytrwałego uczenia się, organizowania własnego procesu uczenia się, w tym poprzez efektywne zarządzanie czasem i informacjami, zarówno indywidualnie, jak i w grupach (Zalecenie Rady, s.10). Kompetencja ta obejmuje świadomość własnego procesu uczenia się i potrzeb w tym zakresie, identyfikowanie dostępnych możliwości oraz zdolność pokonywania przeszkód w celu osiągnięcia powodzenia w uczeniu się. Kompetencja ta oznacza nabywanie, przetwarzanie i przyswajanie nowej wiedzy i umiejętności, a także poszukiwanie i korzystanie ze wskazówek. Umiejętność uczenia się pozwala osobom nabyć umiejętność korzystania z wcześniejszych doświadczeń w uczeniu się i ogólnych doświadczeń życiowych w celu wykorzystywania i stosowania wiedzy i umiejętności w różnorodnych kontekstach - w domu, w pracy, a także w edukacji i szkoleniu. Kluczowymi czynnikami w rozwinięciu tej kompetencji u danej osoby są motywacja i wiara we własne możliwości.

Osoby powinny być w stanie poświęcać czas na samodzielną naukę charakteryzującą się samodyscypliną, ale również na wspólną pracę w ramach procesu uczenia się, czerpać korzyści z różnorodności grupy oraz dzielić się nabytą wiedzą i umiejętnościami. Powinny one być w stanie organizować własny proces uczenia się, ocenić swoją pracę oraz w razie potrzeby szukać rady, informacji i wsparcia.

Pozytywna postawa obejmuje motywację i wiarę we własne możliwości w uczeniu się i osiąganiu sukcesów w tym procesie przez całe życie. Chęć wykorzystywania doświadczeń z życia i uczenia się, a także ciekawość w poszukiwaniu możliwości uczenia się i wykorzystywania tego procesu w różnorodnych sytuacjach życiowych to niezbędne elementy pozytywnej postawy.

Podmiotem procesu dydaktycznego jest oczywiście uczeń, a rolą nauczyciela jest przede wszystkim towarzyszenie uczniowi w procesie zdobywania wiedzy i umiejętności. Tym samym najważniejszy jest proces uczenia się, nie zaś nauczania. Ale należy pamiętać, że zdobywanie kompetencji trwa przez całe życie, a zdobywanie kompetencji w zakresie umiejętności uczenia się jest najmniej wymierną spośród kompetencji kluczowych i osiąganą w stopniu satysfakcjonującym dopiero na etapie dorosłości. **Tym samym, na wczesnych etapach edukacji, rośnie rola nauczyciela, jako organizatora procesów nabywania wiedzy i umiejętności i jego sukcesy, tudzież porażki, mają niemal natychmiastowe przełożenie na proces uczenia się młodego człowieka.**

Akcentowana wyżej motywacja i wiara we własne możliwości jest warunkiem koniecznym, by proces edukacyjny był skuteczny, także w zakresie edukacji matematycznej. Oczywiście warto wspomnieć teorię inteligencji wielorakiej Howarda Gardnera, która wskazuje, że każdy z nas ma własny, osobisty profil inteligencji, niezależnie od tego ile wynosi jego IQ. Niektórzy ludzie mają profile inteligencji zbliżone do profilu preferowanego przez szkołę, z wysokimi wskaźnik inteligencji językowej i matematycznej, inni nad kształtowaniem takiego profilu muszą pracować. W dużym uproszczeniu można stwierdzić, że uczniowie ze słabiej rozwiniętymi profilami inteligencji językowej i matematyczno – logicznej częściej doświadczają określonych problemów w szkole.

Motywacja i wiara we własne możliwości jest warunkiem koniecznym, by proces edukacyjny był skuteczny, także w zakresie edukacji matematycznej.

Ale problemów w szkole doświadczają wszyscy uczniowie, choć ich zakres może być różny. Najczęściej, mówiąc o problemach, mamy na myśli osiąganie przez ucznia słabych wyników potwierdzonych w formie oceny szkolnej, niezaliczenia określonej partii materiału, trudności z otrzymaniem promocji. Ale problemem może być także niechęć do nauki, czy unikanie przez ucznia rozwiązywania postawionych przez nauczyciela problemów, bo wydają się zbyt trywialne. Przywołam tutaj przypadek ucznia, który w ramach języka obcego chętnie czytał literaturę a nawet prosił rodziców o zakup książek w tym języku. Native speaker zwykł mówić, że uczeń ma „niezwykły" akcent, ale to nie mogło istotnie obniżyć motywacji, czy jego ocen szkolnych z przedmiotu. Aż do czasu, gdy zmieniono nauczyciela, który postanowił „przełamać" ucznia i nauczyć go właściwego - w ocenie nauczyciela - akcentowania. Po dwóch ocenach dopuszczających uczeń stracił jakąkolwiek motywację do pracy, przestał czytać literaturę w tym języku. Nauczyciel zabił w nim naturalną ciekawość i pasję.

Najważniejsze jest zatem, żeby spojrzeć w kontekście tej teorii, w sposób pozytywny na uczniów, którzy zostali oddani pod naszą opiekę – należy pamiętać, że każdy może osiągać sukcesy, także wymierne, wyrażone w skali stopni szkolnych, w określonej dziedzinie i zadaniem nauczyciela już na etapie edukacji wczesnoszkolnej jest pomóc odkryć dziecku jego mocne strony, rozwinąć skrzydła

Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój

Rzeczpospolita Polska

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

w tej dziedzinie. **Ale nauczyciel może i powinien stwovrzyć warunki, w których uczeń będzie miał szansę realizować swoje pasje na styku matematyki i obszarów, w których uczeń osiąga niewątpliwe sukcesy – niech ma szansę tam poszukiwać problemów, a później je rozwiązywać.** Oczywiście wymagać to będzie przeprojektowania gotowych, dostarczanych przez wydawnictwa scenariuszy i konspektów lekcji, ale warto pamiętać, że podmiotem jest zawsze uczeń, a nie zbiorowość.

Warto na przykład pamiętać, że matematyka w sztuce nie skończyła się wraz odejściem Renesansu, ale znalazła nowe, współczesne i niezwykłe obszary ekspresji, co widać między innymi w pracach Mauritsa Eschera. I choć trudno od dziesięciolatka, czy dwunastolatka oczekiwać wizji Eschera, to jednak samodzielne odkrywanie symetrii w parkietażach, czyli pokryciach płaszczyzny przystającymi figurami, może być wyzwaniem i okazją do matematycznych odkryć.

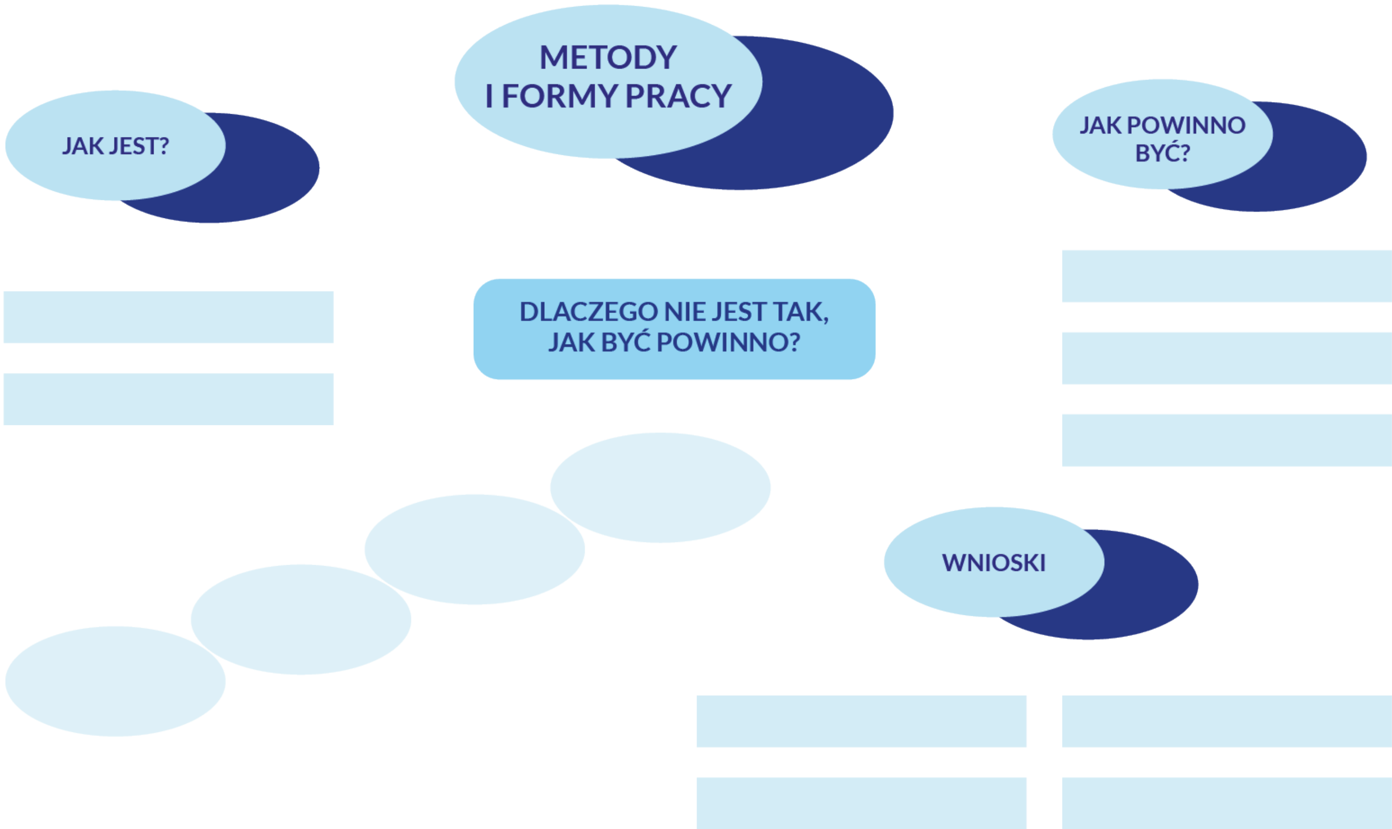
Ogólnopolski Operator Oświaty

http://www.writedesignonline.com/Prompts/Escher.html

Należy pamiętać, o czym mówią teorie konstruktywistyczne, że w procesie uczenia się ważne są emocje i nie można dopuścić, by były to jedynie, lub w większości emocje negatywne związane z lękiem, niepewnością, czy przekonaniem o swojej niedoskonałości. Należy stosować rożne techniki i strategie tak, aby były skuteczne zarówno dla tych, dla których nauka jest przyjemnością i tych, dla których jest przykrą koniecznością.

Teoria Tolmana i Lewina zakłada, że ludzie są zmotywowani do nauki, jeśli istnieje wymierna wartość wykładanej wiedzy (tj. spełnia ona potrzeby osobiste) oraz optymistyczne oczekiwanie sukcesu. I ten sukces każdego z naszych uczniów musi być „rozpisany" w naszych planach pracy, założeniach do realizacji programów, czy opracowywanych konspektach i scenariuszach.

Wydaje się, że nigdy nie jest za wcześnie, by włączyć ucznia w proces wprowadzania zmiany, a szkoła, jako instytucja i nasza praca, jako nauczycieli, tym zmianom powinna być poddawana w sposób ciągły. Można więc poddać stosowane przez nas metody i formy pracy ocenie uczniów. Formę takiej oceny możemy wypracować lub też skorzystać z karty zaproponowanej niżej. Wydaje się że taką kartę powinien wypełnić każdy uczeń indywidualnie, a później przedyskutować w małej grupie – na koniec efekty prac grup winny być zaprezentowane na forum klasy.



Swoistym żartem można nazwać twierdzenie, że każdy z nas jest lokalnie genialnym matematykiem. Można je sformułować z użyciem pojęć z zakresu twierdzeń granicznych: „Dla każdego X istnieje takie jego niepuste otoczenie U, że X jest najlepszym matematykiem w U.” Stwierdzenie to nie jest pozbawione sensu, choć w praktyce pracy nauczyciela należałoby je odnieść nie do matematyki, jako całości, ale do jej określonych obszarów i **spróbować pomóc odkryć te dziedziny, w których uczeń wykazuje ponadprzeciętne zdolności:** czy to będzie tabliczka mnożenia, a może liczenie określonym sposobem, może umiejętności związane z mierzeniem czy warzeniem, obliczeniami zegarowymi czy kalendarzem, a może po prostu z operowaniem pieniędzmi i zamianą nominałów. Dać uczniowi możliwość osiągnięcia sukcesu, odczucia satysfakcji i radości z zajmowania się matematyką.

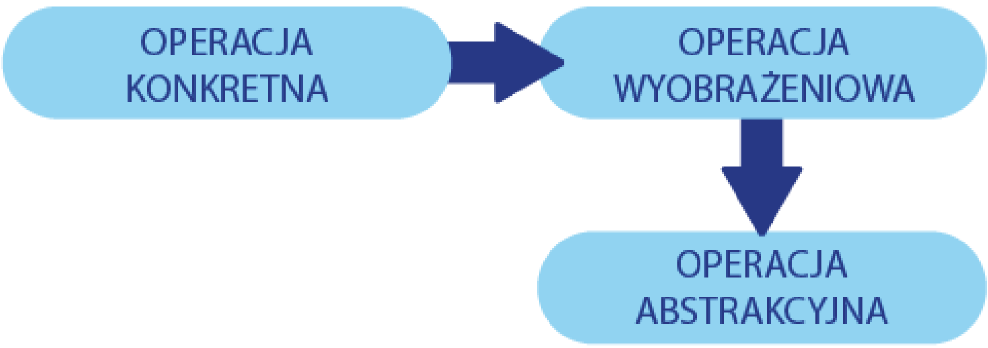
Metody aktywizujące w nauczaniu matematyki nie tylko w szkole podstawowej

Metoda czynnościowa

W klasycznej koncepcji prof. Zofii Krygowskiej (Krygowska, s.127) czynnościowego nauczania matematyki, proces dydaktyczny opiera się z jednej strony na podstawach metodologicznych matematyki jako nauki, z drugiej zaś na psychologii procesu kształtowania się pojęć. Z. Krygowska w "Zarysie dydaktyki matematyki", charakteryzuje koncepcję czynnościowego nauczania następująco: "Czynnościowe nauczanie matematyki jest postępowaniem dydaktycznym uwzględniającym stale i konsekwentnie operatywny charakter matematyki równolegle z psychologicznym procesem interioryzacji prowadzącym od czynności konkretnych i wyobrażeniowych do operacji abstrakcyjnych. Czynnościowe nauczanie matematyki opiera się więc:

1) na wydobyciu przez analizę teoretyczną z materiału nauczania podstawowych operacji w każdej definicji, twierdzeniu, dowodzie,
2) na świadomym organizowaniu sytuacji problemowych sprzyjających procesowi interioryzacji i kształtowaniu myślenia matematycznego ucznia jako specyficznego działania, jako swobodnego i świadomego posługiwania się przyswajanymi stopniowo operacjami, oraz na konsekwentnym stosowaniu zabiegów dydaktycznych mających na celu zapewnienie prawidłowości i efektywności tego procesu..."

Oznacza to, że nauczyciel, poprzez dobór zadań, ćwiczeń i modeli musi stworzyć uczniowi warunki, w których będzie on mógł przebyć drogę od czynności konkretnych, poprzez wyobrażeniowe do abstrakcyjnych. I taka koncepcja jest odpowiedzią na postulat J. Piageta dotyczący wdrożenia teorii operacyjno – interioryzacyjnej.



Przywołana tutaj koncepcja prof. Krygowskiej jest zgodna z naturalną zasadą „stopniowania trudności”, choć nie można stwierdzić, że zawsze operacje abstrakcyjne muszą być trudne. Z pewnością pojęcie prostej opisuje byt abstrakcyjny (nieskończona długość, zerowa szerokość) i analiza szczegółowa tego pojęcia może być trudna nawet dla ucznia szkoły kończącej się maturą. Ale już zrozumienie tego pojęcia, w taki sposób, jak rozumiał to Euklides, tj, jako obiekt, który można dowolnie przedłużać przy pomocy liniału, nie wykracza poza poziom percepcji ucznia dziewięcioletniego. Tym niemniej, w ogólności pojęcia abstrakcyjne i operowanie nimi, stanowią często wyzwanie dla ucznia i zazwyczaj dopiero model pozwala rozpocząć efektywny proces rozwiązywania problemów o charakterze abstrakcyjnym. Odpowiedzią praktyków na koncepcję prof. Krygowskiej było m.in. opracowanie przez H. Siwek (Siwek, s.94) listy typów ćwiczeń realizujących omawianą koncepcję:

1. Ćwiczenia "wprost", w których uczeń wykonuje proste czynności prowadzące do konstrukcji na przykład desygnatów pojęcia.
2. Ćwiczenia odwrotne do powyższych, które wymagają wykonania czynności odwrotnej lub ciągu czynności odwrotnych do poprzednich.
3. Ćwiczenia tej samej czynności myślowej na różnych materiałach, w różnych sytuacjach, z zastosowaniem różnych zmiennych, w różnych położeniach.
4. Ćwiczenia, które prowadzą do różnych ciągów czynności o takim samym rezultacie, różne sposoby rozwiązania, racjonalny wybór schematu jako najbardziej odpowiedniej i ekonomicznej drogi, która prowadzi do rozwiązania zagadnienia.
5. Ćwiczenia w słownym opisie czynności danego rodzaju, konstruowanie planów postępowania opisujących schematy czynności prowadzących do tworzenia przykładów definicji, zastosowania twierdzeń, tworzenia schematów sprawozdawczo - antycypacyjnych, opisywanie przedmiotu abstrakcyjnego za pomocą ciągu myślowych czynności, jako wyniku czynności konkretnych i wyobrażeniowych.
6. Ćwiczenia, które prowokują konflikt myślowy takiego poziomu, że dziecko chce i może go pokonać, kontrprzykłady, skrajne przypadki, zadania z błędami uwypuklające istotne warunki definicji, założenia twierdzeń.
7. Ćwiczenia w różnych formach przedstawiania, ilustrowania albo zapisu tego samego zadania, opisy tradycyjne, drzewka.

Należy zauważyć, że zgodnie z koncepcją czynnościowego nauczania matematyki należy zaplanować ćwiczenia wymienionych typów na poziomie każdego z rodzaju operacji: konkretnych, wyobrażeniowych oraz abstrakcyjnych.

Poniżej zaproponowane są listy zadań kształtujących odpowiednio pojęcie figury osiowo symetrycznej oraz podzielnika w koncepcji czynnościowego nauczania.

Figury osiowosymetryczne. Oś symetrii figury.		
Zadania prowokujące czynności konkretne.	**Zadania prowokujące czynności wyobrażeniowe.**	**Zadania prowokujące czynności abstrakcyjne.**
Zadanie 1. Wskaż w klasie przedmioty posiadające osie symetrii. Pokaż te osie. Ile osi symetrii posiada wskazana figura. Zadanie 2. Prostokątną kartkę od bloku zegnij na pół. Na jednej połowie namaluj domek. Obróć kartkę na drugą stronę i nie patrząc na to co narysowałeś, spróbuj odtworzyć obrazek symetryczny do narysowanego wcześniej. Nałóż na siebie połówki i sprawdź pod światło, czy dobrze dorysowałeś drugą część rysunku.	Zadanie 1. Narysuj kilka osi symetrii oraz ponumeruj je kolejno dla różnych figur (kwadrat, trapez równoramienny, koło). Ile osi symetrii ma: kwadrat, trapez równoramienny, ma koło? Zadanie 2. Narysuj wszystkie osie symetrii odcinka AB. Uzupełnij, wpisując wyrazy: środek, prostopadła, dwie, zawierająca. Odcinek ma .... osie symetrii. Jedną jest prosta................................. ten odcinek. Drugą jest prosta do niego............................. i przechodząca przez .... tego odcinka.	Zadanie. Ile osi symetrii ma: a) punkt, b) półprosta, c) prosta, d) figura złożona z dwóch prostych, e) figura złożona z dwóch okręgów o różnych promieniach, przecinających się w dwóch punktach, f) figura złożona z dwóch okręgów o równych promieniach, które nie mają punktów wspólnych, g) figura złożona z dwóch okręgów współśrodkowych? Każdą odpowiedź uzasadnij.

Dzielniki liczby naturalnej.		
Zadania prowokujące czynności konkretne.	**Zadania prowokujące czynności wyobrażeniowe.**	**Zadania prowokujące czynności abstrakcyjne.**
Zadanie 1. Sprawdź podzielność liczby 12 przez każdą z liczb ze zbioru {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. Podaj, ile dzielników ma liczba 12. Zadanie 2. Rozłóż liczbę 18 na czynniki pierwsze. Sprawdź, czy liczba 18 dzieli się przez każdą z liczb $2\cdot 3, 3\cdot 3, 2\cdot 2$	Zadanie 1. Rozkład liczby naturalnej *x* na czynniki pierwsze ma postać $2\cdot 3\cdot 5$ Rozstrzygnij, czy liczba 15 jest dzielnikiem liczby *x*. Zadanie 2. Wyznacz wszystkie dzielniki liczby 30.	Zadanie 1. Wyznacz wszystkie liczby naturalne *x*, *y* takie, że $x\cdot y=4$ Zadanie 2. Wyznacz wszystkie liczby naturalne *k*, *n* takie, że $(k+1)\cdot n=3$

Metoda huerystyczna, G.Polya

W literaturze popularnonaukowej nie brak współczesnych książek o matematyce, których zarówno warstwa graficzna, jak i treść zachęcają do sięgnięcia po nie. Okazuje się jednak, że już 75 lat temu pojawiła się książka, po którą warto, by wciąż sięgali młodzi adepci matematyki, jak i nauczyciele jej uczący – „Jak to rozwiązać?". Jej autorem jest George Polya, który stał się prekursorem heurystyki w kształceniu matematycznym. Sam termin "heurystyka" pochodzi od greckiego słowa "heurīskō = znajduję", które oznaczało umiejętność dokonywania odkryć, a powstała wśród sofistów w starożytnej Grecji heurystyka, to "sztuka dyskutowania zmierzającego do wykrycia prawdy." W pedagogice heurystyka to sposób organizowania nauki szkolnej polegający na naprowadzaniu uczniów na drogę samodzielnych poszukiwań i mniej lub więcej samodzielnego rozwiązywania zagadnień, wymagający aktywnej postawy ucznia i rozwijający samodzielność jego myślenia. George Polya, któremu zawdzięczamy zapoczątkowanie współczesnego nurtu badań heurystycznych, powiedział, że specyficzną właściwością intelektu jest min. umiejętność rozwiązywania zadań - najbardziej charakterystyczna cecha aktywności człowieka. Polya wysuwa praktyczny cel tak uprawianej dziedziny wiedzy - poprawę nauczania, zwłaszcza nauczania matematyki. Jednakże stwierdza on też wyraźnie, że widzi szersze niż tylko matematyczne zastosowania swoich spostrzeżeń, choć naturalne jest, że matematyczna twórczość interesuje go najbardziej. (Marcińska, s.4-6)
W procesie heurystycznego rozwiązywania zadań, wg. Polyi, występują trzy podstawowe fazy:

Faza obserwowania, w której uczeń:

a) analizuje zadanie,
b) wyróżnia jego składniki,
c) stara się powiązać te składniki z elementami wcześniej nagromadzonej wiedzy oraz ze znanymi sposobami działania,
d) dąży do uzyskania wiążących się z zadaniem faktów.

Faza poszukiwania (odgadywania) rozwiązania, w której uczeń dokonuje:

a) prób syntezy rozwiązania zestawiając plany rozwiązania i realizuje je,
b) analizy przyczyn i uwarunkowań osiągniętego postępu i popełnionych błędów,
c) uzyskania nowych środków modyfikujących sposób postępowania.

Faza oceny (sprawdzania) rozwiązania,

w której uczeń rozwiązując zadanie weryfikuje wynik, ażeby przekonać się, czy spełnia warunki zadania, przy czym określenie sposobu weryfikacji może być przedmiotem odrębnego zadania.

Dokonana schematyzacja heurystycznego rozwiązywania zadań nasuwa interesujące spostrzeżenie. Można zauważyć, że stosowana w rozwiązywaniu metoda zawiera zarazem elementy mające pokrój algorytmów - np. wyróżnianie składników zadania - jak i składniki będące pewnymi racjonalizacjami metody „prób i błędów" - np. zestawianie planów rozwiązywania i takie części, jak np. wiązanie zadania z elementami wcześniej nagromadzonej wiedzy i ze znanymi sposobami działania, których nie będziemy skłonni ani uznać za jednoznaczny „przepis" działania, ani za szczególny przypadek „próbowania i błądzenia". Z**asadniczą treścią metody Polya jest taktowne, dość subtelne podpowiadanie.** Dlatego wyróżnia on uwagi dobre i złe. Te złe to zbyt konkretne, które zamiast otwierać ucznia na rysujące się możliwości, wpychają go na „jedyną słuszną" drogę do rozwiązania. Złe jest polecenie: Zastosuj twierdzenie Pitagorasa. Dobre będzie odwołanie się do dotychczasowego doświadczenia i do wyobraźni dziecka: Czy znasz jakieś podobne zadania? Listę zalecanych uwag i pytań Polya rozbija na następujące cztery grupy związane z fazami rozwiązywania zadania:

1) Zrozumienie zadania. Aby uchronić przed takimi skutkami jak: odpowiadanie na pytanie, którego nie zrozumieliśmy, czy osiągnięcie celu, którego nie pragnęliśmy Polya proponuje następujące pytania:

- Co jest niewiadome? Co jest dane? Jaki jest warunek?
- Czy warunek można spełnić? Czy wystarczy on do określenia niewiadomej? (itd.)
- Zrób rysunek. Wprowadź odpowiednie oznaczenia.
- Wydziel poszczególne części warunku. Czy możesz je zapisać?

„Jest dość oczywiste, że jeżeli możemy coś zapisać, narysować, odróżnimy dane od niewiadomych i potrafimy coś powiedzieć zarówno o nich jak i o łączących je warunkach - to nie grozi nam całkowite nieporozumienie odnośnie tego co i dlaczego ma być zrobione."

2) Układanie planu rozwiązania. Zalecana tutaj lista „podpowiedzi" jest bogatsza. W tym obszarze rozgrywa się najważniejsza część pracy, którą interesuje się przede wszystkim heurystyka. Oto niektóre z tych pytań:

- Może spotkałeś się już z tym zadaniem? A może z jego nieco zmienioną postacią?
- Czy znasz jakieś pokrewne zadanie? A twierdzenie, które można zastosować?
- Spójrz na niewiadomą! I spróbuj przypomnieć sobie jakieś dobrze znane zadanie z tą samą niewiadomą.
- Oto znane ci pokrewne zadanie. Czy umiałbyś z niego skorzystać? A z jakiego wyniku? Metody? A po wprowadzeniu jakiegoś elementu pomocniczego?
- Czy nie mógłbyś zadania postawić inaczej? Odwołaj się do definicji.
- Rozwiąż jakieś prostsze zadanie pokrewne...
- Czy skorzystałeś ze wszystkich danych?

Jan Waszkiewicz słusznie twierdzi, iż warto zastanowić się nad tymi pytaniami i spróbować mieć je w zanadrzu na wypadek konieczności pomocy uczniom. Jednakże pamiętać trzeba, że pomoc ma być okazywana wtedy, kiedy jest pożądana i gdy rzeczywiście może być użyteczna. W każdym innym wypadku będzie ona dysfunkcjonalna.

3) Wykonanie planu. Tutaj Polya zwraca uwagę na konieczność sprawdzania każdego kroku.

4) Wreszcie na koniec winien nastąpić rzut oka wstecz, czyli refleksja o poprawności otrzymanego wyniku, możliwości dojścia do wyniku inną drogą, czy też możliwości dalszego wykorzystania wyniku tej metody.

Nauczyciel stosujący heurystyczne metody nauczania nie podaje uczniowi od razu faktów w gotowej formie, ale prowokuje ucznia do samodzielnego ich wyszukania czy też odkrywania. Wszystkie strategie opracowania nowego materiału przy udziale ucznia zakładają obopólną wymianę informacji między nauczycielem i uczniami oraz między samymi uczniami, a więc są różnymi odmianami rozmowy. Może ona przyjmować postać stawiania pytań, kiedy nauczyciel zadaje uczniom celowo dobrane pytania, przeplatane niejednokrotnie krótkimi poleceniami lub wskazówkami, oczekując prawie jednoznacznej odpowiedzi. Do wyższych form należą pogadanka i dyskusja, które ukazują cel pracy ucznia i pomagają rozwinąć temat lekcji przy różnym, już bardziej świadomym, zaangażowaniu ucznia i różnym stopniu jego samodzielności.

„Przedłużanie" zadania

Zdaniem E. Wittmana uczeń nie powinien zamykać książki po rozwiązaniu zadania. Zdobyte doświadczenie i wiedzę winien wykorzystać do głębszego zbadania tego problemu, do jego „przedłużenia". Proponuje on przechodzić od zadań stereotypowych, do zadań bardziej otwartych, stosując metodę problemów tworzących (czyli dokonując przedłużenia zadania). W jednostce dydaktycznej realizowanej według tej koncepcji wyróżnia się dwa etapy. W pierwszym etapie prowadzący podaje tzw. zadanie wyjściowe. Uczniowie pracują pod kierunkiem nauczyciela, w razie potrzeby są przez niego kierowani, wspomagani wskazówkami, bądź pytaniami naprowadzającymi na właściwą drogę rozwiązania. W etapie drugim bardziej aktywną stroną ma być uczeń. To on ma tworzyć nowe warianty zadania na drodze analogii, uogólniania, stosowania tej samej metody do innych zadań itp.

W tym etapie nauczyciel kieruje analizą sytuacji zadania wyjściowego. Prowadzi dyskusję nad tym jak osiągnięto cel, co utrudniło jego uzyskanie, co sprzyjało rozwiązaniu - w jakim kierunku może zmierzać uogólnienie zadania, jakie są możliwe zadania odwrotne, jakie znaczenie i miejsce w naszej wiedzy zajmie jego wynik itp. Na początku są to zadania, które można rozwiązać przy pomocy wiadomości i doświadczeń metodologicznych przypomnianych i zdobytych w fazie pierwszej. Jednakże dzięki wzrostowi zaufania do swoich umiejętności, pojawiają się niebanalne pytania, mniej zamknięte i wcale nie proste. Mogą to być również takie zadania, do rozwiązania których będą potrzebne nowe wiadomości i umiejętności, zarówno wprowadzane bezpośrednio ze znanych już uczniom, jak również wymagające głębszych studiów, czy chociaż poszukiwań w zasobach sieci internetowych. W tej fazie jednostki dydaktycznej udział prowadzącego zajęcia wzrasta. Ocenia on krytycznie i analizuje wspólnie z klasą pomysły i w umiejętny sposób sugeruje zastosowanie nowych koncepcji. Uczniowie mają szerokie pole do kształcenia matematycznej aktywności. Zadanie wyjściowe staje się źródłem nowych zadań na drodze uogólnienia, analogii itp. Sam wybór zadania wyjściowego nie jest bagatelny. Na początku nauki według tej koncepcji powinny pojawić się raczej zadania stojące „na dole" hierarchii zadań podobnych. Rozwiązywanie ich, a także tworzenie zadań nowych zostaje ukierunkowane przede wszystkim na „małą" matematyzację konkretnej opisanej sytuacji w temacie, na formułowanie hipotez w oparciu o rozważania intuicyjne. Przez odpowiedni dobór dalszych zadań wyjściowych i właściwą metodykę organizacji procesu ich rozwiązywania kształci się i inne umiejętności takie jak np. formułowanie hipotez opartych na analogii, symetrii itp.

Przykładem zadań i ich przedłużeń są poniższe problemy, które mogą być rozwiązywane na etapie klas IV – VI szkoły podstawowej.

Zadanie wyjściowe: oblicz sumę liczb od 1 do 100.
Przedłużenie zadania: oblicz sumę liczb nieparzystych (parzystych) od 1 do 100.
Zadanie wyjściowe: ile jest liczb naturalnych od 1 do 87?
Przedłużenie zadania: ile jest liczb naturalnych od 23 do 87?

Zadanie wyjściowe: ile jest liczb podzielnych przez 3 wśród liczb od 1 do 33?
Przedłużenie zadania: ile jest liczb podzielnych przez 3 wśród liczb od 14 do 32?

Jedną z bardziej oczekiwanych przez nauczycieli matematyki postaw swoich uczniów jest aktywny stosunek do rozwiązywania zadań. Szczególnie interesująca jest ta forma aktywności, która wykorzystując analizę sytuacji występujących w zadaniach oraz metod ich rozwiązywania, pozwala uczniowi dostrzec i umiejętnie sformułować problemy analogiczne lub podobne. Zdobyta wiedza podczas rozwiązywania danego zadania jest wówczas w naturalny sposób wykorzystywana do pogłębienia problemu. Istotnym jest, że aktywności poznawcze, związane z „przedłużeniem" zadania, czy z jego „kruszeniem", o czym niżej, nie są tym samym, co kompetencje stanowiące zazwyczaj bazę związaną z otrzymaniem oceny szkolnej, ale mogą stanowić ważny etap w drodze rozbudzania aktywności i ciekawości poznawczej. Można, w realizacji tej koncepcji nauczania, generować takie sytuacje, w których dostrzega się przede wszystkim pomysły uczniów nieosiągających dotychczas sukcesów w matematyce – to ich propozycje mogą stanowić „zadania do rozwiązania". W ten sposób, zanim dojdzie się do aktywności ogółu uczniów w procesie rozwiązywania zadań, można generować sytuacje, w których część z nich wykaże aktywność w zakresie przygotowania sytuacji problemowej.

Metoda „kruszenia"

Przedstawiona niżej metoda „kruszenia" może być potraktowana jako wariant lub jako rozszerzenie opisanej wyżej koncepcji Wittmana. Metoda „kruszenia" jest jedną z nowoczesnych metod rozwiązywania zadań tekstowych. (Marcińska, s.7-8) Kruszenie w czasie rozwiązywania zadań oznacza modyfikowanie, zwiększanie lub zmniejszanie danych i ich wartości, zastępowanie danych innymi, zmianę danych, a także przekształcanie zadania, jego odwracanie, wprowadzanie nowych związków i zależności, uszczegóławianie lub uogólnianie zadania. Proces „kruszenia" rozpoczyna się zawsze od tzw. zadania bazowego, które jest najczęściej złożone, otwarte, niestandardowe i nie zawiera pytań. Oto dwa przykłady zadań bazowych z propozycjami ich „kruszenia":

Zadanie bazowe: Iza znalazła 5 kasztanów i 8 żołędzi, a Karol znalazł tyle kasztanów, ile Iza razem kasztanów i żołędzi, a żołędzi o 5 mniej niż Iza.

Uczniowie mogą przedstawić treść zadania w tabeli:

Uczniowie	Liczba kasztanów	Liczba żołędzi	Razem
Iza	5	8	
Karol	5+8	8-5	
Razem			

1. Uczniowie układają pytania szczegółowe do zadania bazowego, zastanawiając się, co da się obliczyć w oparciu o podane dane.

Pytania:
a) Ile kasztanów zebrał Karol?
b) Ile żołędzi zebrał Karol?
c) Ile kasztanów i żołędzi zebrała Iza?
d) Ile kasztanów i żołędzi zebrał Karol?
e) Ile kasztanów i żołędzi zebrali razem?

W tym etapie nie stwierdzamy czy pytania są logiczne i możliwe do rozwiązania.
Ważna jest liczba ułożonych pytań. Uczniowie są zachęcani do głośnego formułowania swoich myśli. Mogą popełniać błędy, na których będą się uczyć. Każdy pomysł jest przyjmowany i zapisywany.

2. Następnie uczniowie analizują zapisane pytania i podejmują próbę ułożenia odpowiednich działań – dopiero na tym etapie następuje ocena poprawności i logiczności pytań oraz ewentualne poprawianie błędów (w wyniku dyskusji).

3. Następnie wybrany uczeń układa treść zadania o podobnej tematyce, np.: Iza zebrała 10 kasztanów i pewną liczbę żołędzi. Karol, który zebrał dwa razy więcej kasztanów niż Iza i trzy razy mniej żołędzi niż Iza. Okazało się wówczas, że każde z nich ma łącznie tyle samo zebranych kasztanów i żołędzi. Ile żołędzi zebrała Iza?

Zadanie bazowe:

Historia nauki zna wiele przykładów błędnych teorii, które przez całe lata wyznaczały kierunki jej „rozwoju". Błędy i szukanie rozwiązań zagadnień nieistotnych są udziałem nawet laureatów nagrody Nobla – wśród nich warto wymienić profesora Andre Geima, który jest jedynym bodajże naukowcem, który zanim otrzymał nagrodę Nobla, za prace nad grafenem, został „uhonorowany" anty – Noblem, za eksperymenty z lewitującą żabą. Ale, jeśli błędy mogą popełniać najlepsi, to pozwalajmy na błędy naszym uczniom. Co więcej, nie reagujmy natychmiast, gdy je dostrzeżemy – pozwólmy prowadzić uczniom rozumowanie i dochodzić do wyników, które staną się podstawą do formułowania pytań o prawdziwość/poprawność rozwiązania. W pierwszej kolejności szansę na dostrzeżenie błędu winien mieć uczeń rozwiązujący/referujący, ale w kolejnych chwilach, taką szansę będzie miał cały zespół uczniowski. Nie unikajmy stwierdzeń, że błądzenie jest okazją do powstawania wartościowych sytuacji poznawczych, że błąd jest okazją, by pogłębić analizę postawionego problemu, wówczas popełnienie błędu nie będzie traktowane jako porażka edukacyjna, co mogłoby stać się źródłem lęku przed matematyką.

Rozwijanie inteligencji logiczno–matematycznej przez zabawę

Błędem jest przyjęcie, nieobce także nauczycielom tzw. „starej daty”, że wraz z zakończeniem etapu tzw. kształcenia zintegrowanego i wejściem na poziom nauczania przedmiotowego, nieodwołalnie kończy się etap zabawy w trakcie lekcji. Tymczasem, jeśli przez zabawę rozumieć spontaniczne, przyjemne spędzanie czasu wolnego, do którego chce się wracać, to **ideałem byłoby takie zorganizowanie procesu dydaktycznego, aby jak najbardziej przypominał zabawę.** Oczywiście formy zabawy można i należy dostosować tak do celu, jaki chcemy osiągnąć, jak i do wieku ucznia. Można sięgnąć do gotowych gier planszowych, aplikacji komputerowych czy gier/pomocy przygotowanych samodzielnie przez uczniów. Warto byłoby przygotowując rozkłady materiału przewidzieć w nich jednostki lekcyjne przeznaczone na zabawę, a z całą pewnością warto wykorzystywać tę formę kształcenia w trakcie tzw. zastępstw. Zwalnia to bowiem nauczyciela z konieczności dokonania swoistej diagnozy dotyczącej opanowanych już umiejętności i pozwala wzbudzić aktywność ogółu uczniów, także tych, którzy nie potrafili na wcześniejszych lekcjach osiągnąć sukcesu.

Zabawą, która w niezwykły sposób rozwija inteligencję logiczno – matematyczną jest szyfrowanie. Istotne jest, że można do niej wracać wielokrotnie, na różnych poziomach i przy wykorzystaniu różnych narzędzi – niekiedy wystarczy tylko kartka i długopis, innym razem można przygotować prosty dekoder liniowy (do szyfru Cezara), zdjęcie z klawiaturą telefonu komórkowego, czy „prawdziwą maszynę szyfrującą”.

Najprostszą zabawą, od której można zacząć, jest zapisanie zakodowanej wiadomości poprzez ciąg liczb, np.:

18 – 24 – 23 – 6 – 17

Najprawdopodobniej szybko znajdzie się ktoś, kto zaproponuje, by pod liczby wstawić odpowiadające im litery w alfabecie, co pozwoli dokonać deszyfrażu wiadomości:

18 – 24 – 23 – 6 – 17
s – z – y – f – r

Można zaproponować szyfr zwany „komórkowym”, od klawiatury telefonu.

1	2 ABC	3 DEF
4 GHI	5 JKL	6 MNO
7 PQRS	8 TUV	9 WXYZ
	0	

Wówczas, po podaniu wiadomości, że kluczem kodowym (maszyną kodową) jest klawiatura telefonu komórkowego, nasze kodowane słowo może mieć postać trudniejszą do odczytania

7 – 9 – 9 – 3 – 7

lub łatwiejszą, np.:

7777 – 9999 – 999 – 333 – 777

Można także zaproponować zabawę z szyfrem Cezara – dobrze byłoby tę lekcję wcześniej zaplanować i poprosić, by uczniowie znaleźli w Internecie informację o takich szyfrach, a później by odkodowali zapisane słowo. Na początku długość cyklu przesunięcia można uczniom podać, ale już w kolejnym podejściu można zobowiązać uczniów, by tę długość wyznaczyli – poprzez metodę prób i błędów. Dla cyklu równego 3 kodowane przez nas słowo będzie miało postać:

WCBIU

Widać to na dołączonym przyrządzie kodowym, który może składać się z dwóch pasków papieru, na których zapisane są kolejne litery alfabetu i które można przesuwać względem siebie – oczywiście pozostaje rozstrzygnąć, czy w zapisie alfabetu zapisujemy tradycyjne znaki alfabetu łacińskiego, czy polskie znaki diakrytyczne.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	r	s	t	u	w	x	y	z
d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	r	s	t	u	w	x	y	z	a	b	c

I teraz byłaby pora na włączenie uczniów do tworzenia swoich szyfrów. Myślę, że warto zaproponować im sięgnięcie do zasobów Internetu (i tak by to zrobili), by tam odkryli takie, które ich zafascynują. Ale można ich oczywiście zachęcić do stworzenia swoich zasad szyfrowania oraz narzędzi do ich kodowania.

Źródło: https://321startdiy.pl/szyfrowanie-wiadomosci-zabawa-dla-dzieci/

Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój

Rzeczpospolita Polska

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

Bibliografia

ZALECENIE RADY z dnia 22 maja 2018 r. w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie (Tekst mający znaczenie dla EOG) (2018/C 189/01)

Siwek H., *Czynnościowe nauczanie matematyki*, WSiP, Warszawa 1998.

Polya G., *Jak to rozwiązać*, PWN, Warszawa 2009.

Krygowska Z., *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. I. Warszawa: WSiP 1977.

Beata Marcińska, *Metody aktywizujące w nauczaniu matematyki w szkole podstawowej*, https://www.profesor.pl/publikacja,13816,Artykuly,Metody-aktywizujace-w-nauczaniu-matematyki-w-szkole-podstawowej

Ogólnopolski Operator Oświaty

Materiały szkoleniowe „O „kruszeniu" zadań i kruszeniu lęków przed matematyką", dla klas IV – VIII w obszarze matematyki, są autorskim opracowaniem Jacka Człapińskiego – nauczyciela konsultanta w Łódzkim Centrum Doskonalenia Nauczycieli i Kształcenia Praktycznego, przygotowanym na potrzeby projektu „Architekci wiedzy" - szkoła ćwiczeń w Łodzi", nr POWR.02.10.00-00-3034/20